Раздел 3. Занятие 1

1°. Непрерывность интеграла. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $R = \{(x;y) : a \le x \le A;\ b \le y \le B\}$, то

$$F(y) = \int_a^A f(x,y)\,dx$$

представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $b \le y \le B$.

2°. Дифференцирование под знаком интеграла. Если сверх указанного в 1°, частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывна в области R, то при $b<y<B$ справедлива формула:

$$\frac{d}{dy}\int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A f'_y(x,y)\,dx .$$

Если пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ параметра y и $a<\varphi(y)<A$, $a<\psi(y)<A$ при $b<y<B$, то

$$\frac{d}{dy}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx = f(\psi(y),y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\,\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,dx, \quad b<y<B.$$

3°. Интегрирование под знаком интеграла. При условиях 1° имеем:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x,y)\,dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y)\,dy .$$

Класс: №№ 3711, 3712, 3713 в), 3716, 3717, 3728, 3734, 3737.

№3711. Показать, что $F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,dx$, $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ является непрерывной функцией.

Пусть $y<0 \Rightarrow F(y)=\int_0^1(+1)\,dx=1$

Пусть $y>1 \Rightarrow F(y)=\int_0^1(-1)\,dx=-1$

Пусть $y\in[0;1] \Rightarrow F(y)=\int_0^y f(x,y)\,dx+\int_y^1 f(x,y)\,dx=\int_0^y(-1)\,dx+\int_y^1(+1)\,dx=$

$=-y+(1-y)=1-2y \Rightarrow$

$$F(y)=\begin{cases}+1, & \text{если } y<0\\ 1-2y; & \text{если } y\in[0;1]\\ -1, & \text{если } y>1.\end{cases}$$

Итак функция $F(y)$ непрерывна.

№3712. Исследовать на непрерывность функцию $F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx$, где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на $[0;1]$.

Функции $\varphi(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ и $f(x)$ интегрируемы на $[0;1]$, а $f(x)$ знакопостоянна при $0<x<1$. Кроме того $f(x)$ непрерывна на $[0;1]$. Поэтому по первой теореме о среднем

$$F(y)=f(c(y))\operatorname{arctg}\frac{1}{y},\ 0\le c(y)\le 1.$$

Пусть $\varepsilon>0 \Rightarrow |F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|=\left|\left[f(c(\varepsilon))+f(c(-\varepsilon))\right]\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\ge$

$\ge 2\min\limits_{[0;1]}f(x)\left|\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}\right|\to\pi\min\limits_{[0;1]}f(x)>0$ при $\varepsilon\to 0$

Это означает, что функция $F(y)$ разрывна в нуле.

Далее функция $\psi(x,y)=\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$ непрерывна в каждом из прямоугольников $\{(x;y):\ x\in[0;1],\ y\in[\delta;A]\}$, $\{(x,y):\ x\in[0;1],\ y\in[-A;-\delta]\}$, где $\delta>0$, $A>0$. Поэтому функция $F(y)$ непрерывна на отрезках $[-A;-\delta]$ и $[\delta;A]$, δ и A — произвольны. Следовательно, функция $F(y)$ непрерывна для $y\neq 0$.

№3715 б) Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx$.

Функция $f(\alpha,x)=x^2\cos\alpha x$ непрерывна на прямоугольнике $\{(x;y):\ x\in[0;2],\ \alpha\in[-\alpha_0;\alpha_0]\},\ \alpha_0>0$ и произвольно. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x\,dx=\int_0^2\lim_{\alpha\to 0}x^2\cos\alpha x\,dx=\int_0^2 x^2\,dx=\frac{8}{3}$$

№3717 Вычислить $F'(x)$, если $F(x)=\int\limits_x^{x^2}e^{-xy^2}dy$

$$F'(x)=e^{-xy^2}\Big|_{y=x^2}\cdot 2x-e^{-xy^2}\Big|_{y=x}+\int_x^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-xy^2}dy=$$

$$=e^{-x^5}\cdot 2x-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy=$$

$$=2xe^{-x^5}-e^{-x^3}-\int_x^{x^2}y^2e^{-xy^2}dy.$$

№3728 Показать, что функция $u(x)=\int\limits_0^1 K(x,y)\,v(y)\,dy$,

$$K(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & \text{если } x\le y\\ y(1-x), & \text{если } x>y\end{cases}$$

$v(y)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению $u''(x)=-v(x),\ x\in[0;1]$.

Для $x\in[0;1]$

$$u(x)=\int_0^x y(1-x)v(y)\,dy+\int_x^1 x(1-y)v(y)\,dy\ \Rightarrow$$

$$u'(x)=y(1-x)v(y)\Big|_{y=x}-\int_0^x yv(y)\,dy-x(1-y)v(y)\Big|_{y=x}+$$

$$+\int_x^1(1-y)v(y)\,dy=\cancel{x(1-x)v(x)}-\int_0^x yv(y)\,dy-\cancel{x(1-x)v(x)}+$$

$$+\int_x^1(1-y)v(y)\,dy=-\int_0^x yv(y)\,dy+\int_x^1(1-y)v(y)\,dy\ \Rightarrow$$

$$u''(x)=-yv(y)\Big|_{y=x}-(1-y)v(y)\Big|_{y=x}=-v(x)\ \Rightarrow$$

$$u''(x)=-v(x),\ x\in[0;1].$$

№3734 Вычислить интеграл $I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx$

Пусть $a \geqslant \varepsilon > 0$, тогда

$$f(x,a) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & x \neq 0,\ x \neq \frac{\pi}{2} \\ a, & x = 0 \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'_a(x,a) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

непрерывны в прямоугольнике $R = \left\{(x,y):\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};\ a \geqslant \varepsilon > 0\right\} \Rightarrow$ при $a \geqslant \varepsilon > 0$

$$I'(a) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} = \frac{\pi}{2(1+a)} \Rightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то эти рассуждения имеют место при $a > 0$. Имеем $C = \lim\limits_{a\to+0} I(a)$. Исходный интеграл есть непрерывная функция параметра $a \Rightarrow C = I(0) = 0 \Rightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$ при $a \geqslant 0$.

Но $I(a) = I(|a|)\operatorname{sgn} a \Rightarrow I(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} a \ln(1+|a|)$ для любого a.

№3737 Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx$, $a > 0$, $b > 0$

Имеем $I = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y\,dy$

Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y, & 0 < x \leq 1,\ a \leq y \leq b \\ 0, & x = 0,\ a \leq y \leq b \end{cases}$$

непрерывна на прямоугольнике $\{(x;y):\ x \in [0;1],\ y \in [a;b]\}$.

Поэтому выполним перестановку интегралов:

$$I = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y\,dx = \int\limits_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Bigg|_0^1 dy = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln|y+1|\Big|_a^b =$$

$$= \ln(b+1) - \ln(a+1) = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

№ 3716 Можно ли вычислить по правилу Лейбница производную функции $F'(y) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ при $y=0$.

Нет, нельзя. Ибо на множестве $\Pi = \{(x,y): x\in[0;1],\ y\in[-y_0,y_0]\}$ для произвольного $y_0>0$ подынтегральная функция $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ не определена в точке $(0;0)\in\Pi$. Также не определена и ее производная $f'_y(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Но для $y\neq 0$ $F'(y) = \int_0^1 \dfrac{y\,dx}{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y}\right)$

Можно положить $F'(0) = \lim\limits_{y\to 0+0} F'(y) = \lim\limits_{y\to 0+0} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Итак $F'(0^{+0}) = \dfrac{\pi}{2}$, иначе $F'(0-0) = -\dfrac{\pi}{2}$

Дома: № 3713 а, б; 3713.1, 3715, 3718 а, д; 3729, 3735, 3738 а.

№3713 а) Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$

Фиксируем произвольное $\alpha_0>0$. Рассмотрим $I=[-\alpha_0;\alpha_0]$. На I функции $\varphi(\alpha)=\alpha$ и $\psi(\alpha)=1+\alpha$ непрерывны. На прямоугольнике $\Pi=\{(\alpha;x):$ $\alpha\in[-\alpha_0;\alpha_0]$; $x\in[\alpha;1+\alpha]\}$ функция $f(\alpha,x)=\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$ также непрерывна $\to$ Если $F(\alpha)=\int\limits_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}F(\alpha)=F(0)=$

$$=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$

Функция $f_n(x)=\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$ при фиксированном $n\in N$ непрерывна по $x\in[0;1]$ и $\{f_n(x)\}\rightrightarrows f_0(x)=\frac{1}{1+e^x}$ при $n\to+\infty$.

Действительно, имеем оценку:

$$|f_n(x)-f_0(x)|=\left|\frac{1}{1+(1+\frac{x}{n})^n}-\frac{1}{1+e^x}\right|=\left|\frac{e^x-(1+\frac{x}{n})^n}{(1+e^x)(1+[1+\frac{x}{n}]^n)}\right|\le$$

$$\le\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|\le\sup_{[0;1]}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right|=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\longrightarrow 0 \text{ при } n\to\infty$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n}=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+e^x}=\ln\frac{2e}{1+e}$.

№3713.1 Найти $A=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}\,d\theta$

При $\theta\in[0;\frac{\pi}{2}]$ $\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta$, то $e^{-R\sin\theta}\le e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\Rightarrow$

$$A=\int\limits_0^{\pi/2}e^{-R\sin\theta}\,d\theta\le\int\limits_0^{\pi/2}e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)\Rightarrow$$

$$0\le A\le\lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)\equiv 0\Rightarrow A=0.$$

№3715. Можно ли совершить предельный переход под знаком интеграла в выражении $\lim\limits_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx$.

Нет, нельзя. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем нуль. Если же вычислить интеграл, а затем перейти к пределу, получаем:

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\int\limits_0^1 e^{-\frac{x^2}{y^2}} d\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(1 - e^{-\frac{1}{y^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отметим, что в точке $(0;0)$ функция $f(x,y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}$ терпит разрыв.

№3718 ⓐ Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx$.

$$F'(\alpha) = e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=\cos\alpha}\cdot(-\sin\alpha) - e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\Big|_{x=\sin\alpha}\cos\alpha + \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\, e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= -\left\{e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha + e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha\right\} + \int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\, e^{\alpha\sqrt{1-x^2}} dx.$$

ⓓ Найти $F'(\alpha)$, если $F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy$.

Пусть $f(\alpha, x) = \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2) dy \Rightarrow F(\alpha) = \int\limits_0^{\alpha^2} f(\alpha, x) dx \Rightarrow$

$$F'(\alpha) = 2\alpha f(\alpha, \alpha^2) + \int\limits_0^{\alpha^2} f'_\alpha(\alpha, x) dx \Rightarrow$$

$$f(\alpha,\alpha^2) = \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2) dy$$

$$f'_\alpha(\alpha, x) = \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\Big|_{y=x+\alpha} - \sin(x^2+y^2-\alpha^2)\Big|_{y=x-\alpha} +$$

$$+ \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2) dy \Rightarrow$$

$$f'_\alpha(\alpha, x) = \sin(2x^2+2\alpha x) - \sin(2x^2-2\alpha x) - 2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2) dy \Rightarrow$$

$$f'_\alpha(\alpha, x) = 2\cos 2x^2 \sin 2\alpha x - 2\alpha\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2) dy$$

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha} \sin(y^2+\alpha^4-\alpha^2)\,dy + 2\int\limits_0^{\alpha^2} \cos 2x^2 \sin 2\alpha x\,dx -$$

$$- 2\alpha \int\limits_0^{\alpha^2} dx \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha} \cos(x^2+y^2-\alpha^2)\,dy .$$

№3729 Найти $F''_{xy}(x,y)$, если $F(x,y) = \int\limits_{x/y}^{xy} (x-yz)\,f(z)\,dz$,

где $f(z)$ дифференцируемая функция.

$$F'_x = (x-yz)f(z)\Big|_{z=xy} \cdot y - \cancel{(x-yz)f(z)\Big|_{z=\frac{x}{y}}}^{\,0} \cdot \frac{1}{y} + \int\limits_{x/y}^{xy} f(z)\,dz =$$

$$= xy(1-y^2)f(xy) + \int\limits_{x/y}^{xy} f(z)\,dz$$

$$F''_{xy} = x\{y(1-y^2)\}'_y f(xy) + x^2y(1-y^2)f'(xy) + f(z)\Big|_{z=xy} \cdot x - f(z)\Big|_{z=\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= x(2-3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2y(1-y^2)f'(xy).$$

№3735 Вычислить интеграл: $I(a) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$, $|a|<1$.

Функции

$$f(a,x) = \begin{cases} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f'_a(a,x) = \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}$$

непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(a;x) : |a| \le 1-\varepsilon < 1,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\}$ для произвольного $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow$

$$I'(a) = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{1-a^2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \Rightarrow$$

$$I(a) = \pi \arcsin a + C.$$

Устремляя ε к нулю, замечаем, что полученное равенство справедливо при $|a|<1$. Значит $I(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow I(a) = \pi\arcsin a.$

№ 3738(а) Вычислить интеграл $\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$. для $a > 0$ и $b > 0$.

Имеем $I = \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 dx \int_a^b x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dy$.

Функция $f(x,y) = \begin{cases} x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right), & 0 < x \le 1, \ a \le y \le b \\ 0, & x = 0, \ a \le y \le b \end{cases}$

непрерывна на прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : x \in [0;1]; y \in [a;b]\}$.

Поэтому выполним перестановку интегралов:

$$I = \int_a^b dy \int_0^1 x^y \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx = \left| \begin{matrix} x = e^{-t} \\ dx = -e^{-t} dt \end{matrix} \right| = \int_a^b \frac{dy}{(1+y)^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(1+y) \Big|_a^b = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1) =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{b-a}{1 + (a+1)(b+1)}$$